Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Aussagen**

Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1) *Was ist eine Aussage?*
Welche der folgenden Ausdrücke sind Aussagen?

(a) Wie viele Primzahlzwillinge gibt es?

(b) Eine natürliche Zahl ist genau dann eine Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler hat.

(c) Dies ist keine Aussage.

(d) Arbeiten Sie gewissenhaft!

(e) $2x^2$+ 5x - 3

(f) $\pi = 3$

Aufgabe 2 (1) *Formalisierung*
Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit logischen Junktoren:

(a) nicht nur A, sondern auch B,

(b) es ist nicht wahr, dass A, oder B,

(c) dann, aber nur dann A, wenn nicht B,

(d) nur wenn A, nicht B,

(e) weder A noch B,

(f) A, vorausgesetzt, dass B.

Aufgabe 3 (1) *Formalisierung und Negation*
Unter Verwendung der Aussagen

A: "Der Student hat die Lehrveranstaltungen besucht."
B: "Der Student hat gewissenhaft studiert."
C: "Der Student hat die Übungsaufgaben gelöst."
D: "Der Student besteht das Examen."

beschreiben Sie symbolisch:

(a) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht, gewissenhaft studiert und die Übungsaufgaben gelöst hat, besteht er das Examen.

(b) Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht, aber nicht gewissenhaft studiert oder die Übungsaufgaben nicht gelöst hat, besteht er das Examen nicht.

(c) Der Student besteht das Examen genau dann, wenn er die Lehrveranstaltungen besucht, gewissenhaft studiert und die Übungsaufgaben gelöst hat.

Negieren Sie die obigen Aussagen so, dass der Negator nur noch vor den Aussagebuchstaben vorkommt und formulieren Sie dann die Aussagen wieder in Worten.

Aufgabe 4 (1) *Negationen*
Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $0 < 1 \vee 1 > 2$

b) $0 > 1 \wedge 1 < 2$

c) $0 < 1 \Rightarrow 1 < 2$

d) $0 > 1 \Leftrightarrow 1 > 2$

Bilden Sie die Negation der obigen Aussagen. Sorgen Sie dann dafür, dass in den Negationen das Zeichen $\neg$ nicht mehr vorkommt.

Aufgabe 5 (1) *Wahrheitstabellen*
Die Aussage A sei "$5 > 9$", die Aussage B sei "Gerhard Schröder ist eine Frau". Vervollständigen Sie die folgende Wahrheitstabelle.

A	B	$A \wedge B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \wedge B \Rightarrow \neg B$	$\neg A \vee B \Leftrightarrow A$

Aufgabe 6 (2) *Wechselseitige Definierbarkeit von Junktoren*
Ein Ausdruck der folgenden Form wird eine Definition von $\vee$ durch $\{\neg\ ,\ \wedge\ \}$ genannt:

$$A \vee B \leftrightarrow_{\text{def}} \neg(\neg A\ \wedge\ \neg B)$$

a) Geben Sie entsprechende Definitionen von $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ durch $\{\neg\ ,\ \wedge\ \}$ an und weisen Sie deren Korrektheit durch eine Wahrheitstafel nach.

b) Aufgabenteil a) zeigt, dass zwei Junktoren ausreichen, um alle anderen Junktoren der Aussagenlogik zu definieren. Zeigen Sie am Beispiel des sogenannten Sheffer-Striches "|" mit folgenden Wahr-/Falschheitsbedingungen

A	B	$A \mid B$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

die Möglichkeit der Definition aller Junktoren durch einen einzigen.

Aufgabe 7 (1) *Wichtige aussagenlogische Äquivalenzen*
Verifizieren sie mithilfe einer Wahrheitstabelle die folgenden grundlegenden Äquivalenzen.

(a) ¬(A ∧ B) äq. (¬A ∨ ¬B) (*1. Regel von DeMorgan*)

(b) ¬(A ∨ B) äq. (¬A ∧ ¬B) (*2. Regel von DeMorgan*)

(c) [A ∨ (B ∧ C)] äq. [(A ∨ B) ∧ (A ∨ C)] (*Distributivität von Dis- und Konjunktion*)

(d) [A ∧ (B ∨ C)] äq. [(A ∧ B) ∨ (A ∧C)] (*Distributivität von Kon- und Disjunktion*)

(e) (A ⇒ B) äq. (¬A ∨ B) (*Wahrheitsbedingungen der Subjunktion*)

(f) (A ⇔ B) äq. [(A ⇒ B) ∧ (B ⇒ A)] (*Definition der Bisubjunktion*)

Aufgabe 8 (2) *Herleitung Äquivalenzen*
Die Eigenschaft zweier Aussagen äquivalent zu sein ist transitiv, das bedeutet, sind A und B, sowie B und C äquivalent, so sind es auch A und C. Nutzen Sie diese Eigenschaft um mithilfe der Äquivalenzen der vorherigen Aufgabe folgende Äquivalenzen ohne Wahrheitstabelle (!) zu beweisen.

(a) ¬(A ⇒ B) äq. (A ∧ ¬B)

(b) ¬(A ⇔ B) äq. (¬A ⇔ B)

(c) (¬A ⇔ B) äq. (A ⇔ ¬B)

Aufgabe 9 (1) *Implikationen und Äquivalenzen I*
Beweisen Sie die folgende Tautologien mithilfe einer Wahrheitstabelle.

(a) $[(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee \mathrm{C}] \Leftrightarrow [\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})]$ (*Assoziativität der Disjunktion*)

(b) $[(\neg \mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \wedge \neg \mathrm{B})] \Rightarrow \mathrm{A}$ (*Widerspruchsbeweis: Variante 1*)

(c) $(\neg \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow \mathrm{A}$ (*Widerspruchsbeweis: Variante 2*)

(d) $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\neg \mathrm{B} \Rightarrow \neg \mathrm{A})$ (*Kontraposition*)

(e) $[(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C}) \wedge (\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{A})] \Leftrightarrow (\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{C})$ (*Ringschluss*)

Hinweis: Die hier genannten Äquivalenzen und Implikationen haben eigene Namen, weil sie bei vielen mathematischen Beweisen Anwendung finden. Bei Interesse informieren Sie sich über die genannten Begriffe.

Aufgabe 10 (2) *Implikationen und Äquivalenzen II*
Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien? Beweisen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel oder äquivalenter Umformung. Falls es sich nicht um eine Tautologie handelt, geben Sie ein Gegenbeispiel (also geeignete Wahrheitswerte für A, B und ggf. C) an.

(a) $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A})$

(b) $[(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})] \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C})$

(c) $[(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})] \Leftrightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C})$

(d) $[(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{C}] \Leftrightarrow [\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})]$

Aufgabe 11 (3) *Zusammenhang von Aussagen*
Es seien zwei Aussagen A und B gegeben. Bestimmen Sie, welche der beiden Aussagen die andere impliziert. Benutzen Sie die Junktoren $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$.

a) A: "Jede der Zahlen a und b ist durch 7 teilbar."
B: "Die Summe $a + b$ ist durch 7 teilbar."

b) A: "Die letzte Ziffer von a ist gerade."
B: "Die Zahl a ist durch 4 teilbar."

c) A: "Das Dreieck Δ ist gleichschenklig."
B: "Zwei Seitenhalbierenden des Dreiecks Δ sind gleich."

d) A: "Aus drei Intervale mit Längen a, b und c kann man ein Dreieck konstruieren."
B: "Die natürlichen Zahlen a, b und c erfüllen die Ungleichungen $a+b > c$, $b+c > a$ und $c + a > b$."

Aufgabe 12 (2) *Formalisation in PL*
Formulieren Sie folgende Sätze als prädikatenlogische/mathematische Aussage.
Verwenden Sie dazu die aussagenlogischen Junktoren, die zwei prädikatenlogischen Quantoren, das Identitätssymbol ("=") und Variablen.

(a) Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade.

(b) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere.

(c) Es gibt eine größte natürliche Zahl.

(d) Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl ist gerade.

(e) Es gibt genau eine natürliche Zahl deren Quadrat gleich ihrer Summe mit sich selbst ist.

Welche dieser Aussagen sind wahr, welche falsch? Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Teilaufgaben (b) und (c) vergleichen?

Aufgabe 13 (3) *Negation von PL-Aussagen*
Übersetzen Sie folgende Aussagen in (vernünftige) deutsche Sätze. Bilden Sie danach ihre Negationen und reformulieren Sie sie als prädikatenlogische/mathematische Aussage ohne Verwendung des Negators. Überlegen Sie sich dazu auch, wie Sie die Wahrheit der Negation nachweisen würden.

(a) $\exists n \in \mathbb{N}: \; n < 0$

(b) $\forall p \in \mathbb{N}: \; p$ Primzahl $\Rightarrow p$ ungerade

(c) $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists m \in \mathbb{N}: \; m < n$

(d) $\forall i, j, k \in \mathbb{N}: \; i < j \Rightarrow i < k \vee k < j$

(e) $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}:$
$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m > N$$

(f) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0:$
$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in X \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

Welches Muster erkennen Sie?